Heron $\Longleftrightarrow$ Pitagora

Vladimir Volenec[1]

Heronov i Pitagorin poučak su nam dobro poznati. Možda je manje poznato da su ta dva poučka ekvivalentna, tj. da se svaki od njih može dokazati pomoću onog drugog, ako je poznata formula za površinu trokuta pomoću duljine osnovice i duljine visine.

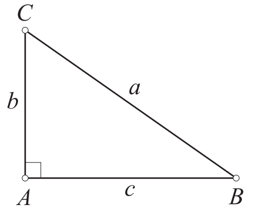
Neka trokut ABC ima površinu P i duljine stranica $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, te poluopseg $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Najprije provedimo mali račun:

$$\begin{aligned}16s(s-a)(s-b)(s-c) &= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)\\ &= [(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]\\ &= (2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)\\ &= (2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2,\end{aligned}$$

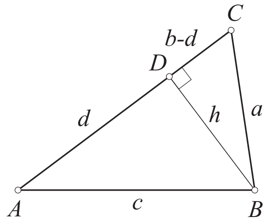
pa u svakom trokutu, uz gornji dogovor o oznakama, vrijedi jednakost

$$16s(s-a)(s-b)(s-c) = (2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2. \tag{1}$$

Heron $\Longrightarrow$ Pitagora. Ako trokut ABC ima pravi kut kod vrha A, tada za njegovu površinu imamo jednakost $4P = 2bc$, a po Heronovom poučku lijeva strana jednakosti (1) je jednaka $16P^2$, pa iz te jednakosti slijedi $b^2+c^2-a^2 = 0$, a to je Pitagorin poučak.



Slika 1.



Slika 2.

Pitagora $\Longrightarrow$ Heron. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je b duljina najdulje stranice trokuta ABC. Tada odmah slijedi da su kutovi kod vrhova A i C šiljasti. Zato visina BD iz vrha B na stranicu AC ima nožište D unutar te stranice. Stavimo li $|AD| = d$, tada je $|CD| = b-d$. Po Pitagorinom poučku za pravokutne trokute ABD i BCD imamo jednakosti $c^2 = d^2+h^2$, $a^2 = (b-d)^2+h^2$, gdje je $h = |BD|$. Sada imamo ovaj mali račun:

$$b^2+c^2-a^2 = b^2+(d^2+h^2)-(b^2-2bd+d^2+h^2) = 2bd.$$

Iz (1) imamo

$$16s(s-a)(s-b)(s-c) = (2bc)^2-(2bd)^2 = 4b^2(c^2-d^2) = 4b^2h^2 = 16P^2,$$

tj. $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, gdje smo pri kraju još jednom koristili Pitagorin poučak.

Literatura

[1] V. Pratt, *Factoring Heron*, College Math. J. **40** (2009), 15–16.

[1] Autor je redovni profesor u mirovini na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu.